グラスマン数と経路積分

http://tobirayt.wixsite.com/string-theory

トビラ。。

ここではグラスマン数といったものをどのように定義し、どのような性質を持つのかを述べることにする。グラスマン数に対応する演算子はフェルミオン的なものになるため、フェルミオンの多体系や場の量子論などを扱うときは必要となる概念である。

公理

- c 数 : 実数や複素数を c 数という（c は classical（古典）の c）。
  c 数は可換ではあるが、可換であるからと言って c 数とは限らない。
- q 数 : 演算子を q 数と呼ぶ (q は quantum の q)。
- a 数、グラスマン数 : 反可換なものを a 数もしくはグラスマン数（g 数）と呼ぶ（a は anti-commuting c number の a)。すなわち $\{\theta_n\}$, $(n \in [1,\,N] \subset \mathbb{Z})$ において
$$\{\theta_n,\,\theta_m\} \overset{\mathrm{d}}{\equiv} \theta_n\theta_m + \theta_m\theta_n = 0$$
  を任意の $n,\,m \in [0,\,N]$ に対し満たすのであれば、この $\{\theta_n\}$ はグラスマン数である。
- グラスマン数と c 数の積 : グラスマン数と c 数の積はグラスマン数として定義される。これがもっとも単純でかつ意味のある定義である。
- 零とグラスマン数の積 : 0 とグラスマン数 θ の積は 0 になると定義する。
$$0 \times \theta = \theta \times 0 = 0$$
- 実グラスマン数 θ : $\theta^* = \theta$ が成立するグラスマン数 θ を実グラスマン数と称す。
- 複素グラスマン数 ζ : 二つの実グラスマン数 $\theta_1,\,\theta_2$ を用いて、複素グラスマン数 ζ とその複素共役なグラスマン数を ζ^* を
$$\zeta \overset{\mathrm{d}}{\equiv} \theta_1 + i\theta_2, \qquad \zeta^* \overset{\mathrm{d}}{\equiv} \theta_1 - i\theta_2$$
  と定義し、さらに n 個の複素グラスマン数の積の複素共役に対し
$$(\zeta_1\zeta_2 \dots \zeta_n)^* = \zeta_n\zeta_{n-1}\dots\zeta_1$$
  という関係式が成立するものと定義する。
- ベレジン積分 (Berezin integral) : グラスマン数 θ の積分は通常ベレジン積分（別名グラスマン積分）が採用され、その定義は具体的には次のようになる。
  - 線形性 : $\int d\theta\,\{af(\theta) + bg(\theta)\} = a\int d\theta\, f(\theta) + b\int d\theta\, g(\theta)$
  - 積分値 : $\int d\theta\,\theta = -\int \theta d\theta = 1, \quad \int d\theta\, = 0$
- デルタ関数 : グラスマン数のデルタ関数を
$$\int d\theta\,\delta(\theta - \theta')f(\theta) = f(\theta')$$
  で定義する。通常のデルタ関数とは異なり、この順序で覚えておく必要がある。
- 昇降演算子 $\hat{\chi},\,\hat{\psi}$ と状態 $|\!\downarrow\rangle, |\!\uparrow\rangle$:
$$\begin{aligned}
&\{\hat{\psi},\,\hat{\chi}\} = 1, \quad \hat{\psi}^2 = \hat{\chi}^2 = 0, \quad (\hat{\psi},\,\hat{\chi}\text{の定義})\\
&\hat{\psi}\,|\!\downarrow\rangle = 0, \quad \hat{\chi}\,|\!\downarrow\rangle = |\!\uparrow\rangle \qquad (|\!\downarrow\rangle, |\!\uparrow\rangle\text{ の定義})\\
&\hat{\psi}\,|\!\uparrow\rangle = |\!\downarrow\rangle, \quad \hat{\chi}\,|\!\uparrow\rangle = 0 \qquad (\text{定理})
\end{aligned}$$
  この時 $\hat{\psi}$ を下降演算子、$\hat{\chi}$ を上昇演算子と称す。
- $|\,\psi\rangle$:
$$|\,\psi\rangle \overset{\mathrm{d}}{\equiv} |\!\downarrow\rangle + |\!\uparrow\rangle\psi, \qquad \hat{\psi}\,|\,\psi\rangle = |\,\psi\rangle\psi$$

定理

- $\boxed{\text{内積}}$: 内積には有用な定義は次のAとBの２通りある。

$$(A): \quad \langle \uparrow | \uparrow \rangle = \langle \downarrow | \downarrow \rangle = 1, \qquad \langle \uparrow | \downarrow \rangle = \langle \downarrow | \uparrow \rangle = 0$$

$$(B): \quad \langle \uparrow | \downarrow \rangle = \langle \downarrow | \uparrow \rangle = 1, \qquad \langle \uparrow | \uparrow \rangle = \langle \downarrow | \downarrow \rangle = 0$$

- $\boxed{\text{フェルミオン数 } \hat{F}}$:

$$\hat{F}\, |\downarrow\rangle = 2n\, |\downarrow\rangle, \quad \hat{F}\, |\uparrow\rangle = (2n+1)\, |\uparrow\rangle, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

としてフェルミオン数演算子 $\hat{F}$ を定義する。

定理

- $\boxed{1}$: 0 は c 数でありグラスマン数でもある。
- $\boxed{2}$: 0 以外の複素数はグラスマン数ではない。
- $\boxed{3}$: c 数とグラスマン数は可換である。
- $\boxed{4}$: グラスマン数の偶数積は、c 数やグラスマン数と可換である。
- $\boxed{5}$: グラスマン数の奇数積は、グラスマン数である。
- $\boxed{4}$: n 個のグラスマン数 θ_i の積は一般にエディントンのイプシロンを用いて

$$\theta_{i_1}\theta_{i_2}...\theta_{i_n} = \epsilon^{i_1 i_2 ... i_n}\theta_1\theta_2...\theta_n$$

という関係式が成立する。
- $\boxed{6}$: グラスマン数はベキ零である。
- $\boxed{7}$: N 個のグラスマン数からなるグラスマン関数 $f(x, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_N)$ を、多項式に展開したとき 2^N 個の項を持つ。
- $\boxed{8}$: 複素グラスマン数 ζ に対し $(\zeta^*)^* = \zeta$ が成立する。
- $\boxed{9}$: グラスマン数に大小関係（不等式）は存在しない。
- $\boxed{10}$:

$$\langle \psi \,| \overleftarrow{\hat{\psi}}^{\,\dagger} = -\psi \langle \psi \,|, \quad 1 = \int |\, \psi \rangle d\psi \langle \psi \,|$$

- $\boxed{11}$:

$$\langle \psi_f, T \mid \psi_i, 0 \rangle = \int [d\chi\, d\psi] \exp{(iS)}$$

- $\boxed{12}$:

$$\int d\psi \langle \psi \mid \hat{A} \mid \psi \rangle = \mathrm{Tr}\Big\{(-1)^{\hat{F}}\hat{A}\Big\}, \qquad \int d\psi \langle \psi \mid \hat{A} \mid -\psi \rangle = \mathrm{Tr}\Big\{\hat{A}\Big\} \qquad ((A) \text{ の内積を採用した場合 })$$

- $\boxed{13}$:

$$\int d\psi \langle \psi, U \mid \psi, 0 \rangle_E = \mathrm{Tr}\Bigg\{(-1)^{\hat{F}} \exp\big(-\hat{H}U\big)\Bigg\}, \qquad \int d\psi \langle \psi, U \mid -\psi, 0 \rangle_E = \mathrm{Tr}\Bigg\{\exp\big(-\hat{H}U\big)\Bigg\}$$

- $\boxed{14}$:

$$\langle 1 \rangle = \int [d\psi\, d\chi] \exp\left(\int d^d x\, \chi \Delta \psi\right) = \det \Delta$$

量子力学では、ある規則により可換な力学量（c 数）が非可換な力学量（q 数）に変更され、それを量子化といった[*1]。数式で示すと

$$[p, q] \stackrel{\mathrm{d}}{\equiv} pq - qp = 0, \quad \stackrel{\text{量子化}}{\Longrightarrow} \quad [\hat{p}, \hat{q}] \stackrel{\mathrm{d}}{\equiv} \hat{p}\hat{q} - \hat{q}\hat{p} = i\hbar$$

である。左側の量 p, q が c 数であり、右側の量 $\hat{p}, \hat{q}$ が q 数である[*2]。可換とは $pq = qp$ と積の順序を入れ替えることができる様を指す。そう考えると反可換 $\theta\chi = -\chi\theta$ となるような量を考えるのもまた面白い。式変形して

$$\{\theta, \chi\} \stackrel{\mathrm{d}}{\equiv} \theta\chi + \chi\theta = 0$$

が成立するような物を a 数、もしくはグラスマン数 (g 数) と呼ぶ。もう少し一般化すると、$\{\theta_n\}$, $(n \in [1, N] \subset \mathbb{Z})$ の任意の n において

$$\{\theta_n, \theta_m\} = 0 \tag{0.0.1}$$

が成立すれば、$\{\theta_n\}$ はグラスマン数であるということになる。グラスマン数の初歩的な定義として

$$0 \times \theta = \theta \times 0 = 0$$

[*1] 正確には可換なものが c 数ではなく、複素数が c 数である。可換であるからと言って c 数とは限らない。

[*2] c 数や q 数と言葉は、実数や虚数を演算子と区別するためにディラックが論文で使いはずめたといわれている。

が成立するものとする。グラスマン数は、「数」とは言われているが実数や複素数といったものではない。その証明は簡単である。例えば、$\{\theta_n\} \stackrel{\mathrm{d}}{\equiv} \{3, \theta_1, \theta_2\}$ といったものを考えてみよう。ここに現れている 3 は実数であるが、これはグラスマン数になりえない。例えば、(0.0.1) 式は任意のグラスマン数 θ_n について成立しなければならないため、

$$\{3, 3\} = 0$$

が成立しなければならないが、左辺は $3 \times 3 + 3 \times 3 = 18 \neq 0$ であるため成立しない。したがってグラスマン数に数値は含まれない。しかしながら例外が存在し、それは 0 である。実際に

$$\{0, 0\} = 0 \times 0 + 0 \times 0 = 0, \quad \{0, \theta\} = 0 \times \theta + \theta \times 0 = 0$$

となるため、0 はグラスマン数である。c 数は複素数のことを指すので、0 は c 数でもある。

定理

- 0 は c 数でもありグラスマン数でもある。
- 0 以外の数はグラスマン数ではない。

が成立する。

次に問題となるのがグラスマン数と c 数の積である。グラスマン数と c 数の積がグラスマン数になるのか c 数になるのかを議論しなければならない。結果を言えばグラスマン数と c 数の積がグラスマン数であると定義した場合にのみ、意味が生じる。

それを示すためにまず、グラスマン数と c 数の積が c 数であると仮定してみよう。a を c 数であるとして

$$\xi \stackrel{\mathrm{d}}{\equiv} a\theta, \quad \xi' \stackrel{\mathrm{d}}{\equiv} \theta a$$

θ はグラスマン数である。仮定により ξ, ξ' は c 数となる。もし、グラスマン数 θ と c 数の a が反可換なら

$$\xi = -\xi'$$

となり、可換であるなら

$$\xi = \xi'$$

である。そこで一般に

$$\xi = (-1)^i \xi' \tag{0.0.2}$$

としておこう。i は θ と a が可換である場合偶数に、反可換である場合奇数になるものとする。ここでもう一つグラスマン数 χ を用意しよう。この χ と ξ を作用させて

$$\zeta \stackrel{\mathrm{d}}{\equiv} \xi\chi, \quad \zeta' \stackrel{\mathrm{d}}{\equiv} \chi\xi$$

といったものを作る。これは c 数とグラスマン数の積から作った c 数であるため ξ と対等な存在であり (0.0.2) 式により

$$\zeta = (-1)^i \zeta' \tag{0.0.3}$$

が成立しなければならない。しかしながら式変形をすると

$$\begin{aligned}\zeta = \xi\chi = a\theta\chi = -a\chi\theta = -\big\{(-1)^i \chi a\big\}\theta = (-1)^{i+1}\chi a\theta = (-1)^{i+1}\chi\zeta \\ (-1)^i \zeta' = (-1)^{i+1}\zeta' \qquad\qquad\qquad\qquad\end{aligned}$$

となる。よってこのような定義では、ζ や ξ は 0 しか許されずナンセンスである。

そこで今度は仮定を変えてグラスマン数 (θ) と c 数 (a) の積 $(\xi = a\theta)$ はグラスマン数になると仮定する。この場合 ζ は c 数とグラスマン数の積ではないため (0.0.3) 式は成立せず、わかりに

$$\zeta = \xi\chi = -\chi\xi = -\zeta'$$

が成立する。式変形を行うと、

$$\begin{aligned}\zeta = \xi\chi = a\theta\chi = -a\chi\theta = -\big\{(-1)^i \chi a\big\}\theta = (-1)^{i+1}\chi\xi \\ -\zeta' = (-1)^{i+1}\zeta' \qquad\qquad\qquad\qquad\end{aligned}$$

これにより、i は偶数であることが結論付けられ、その場合にのみ意味のある一貫性を得る。i が偶数であることにより

$$a\theta = \theta a$$

と、c 数とグラスマン数は可換となる。

定理

- c 数とグラスマン数の積はグラスマン数であると定義するのがもっとも単純でかつ意味がある。
- この場合 c 数とグラスマン数は可換となる。

N 個のグラスマン数の積は、一般にエディントンのイプシロンを用いて

$$\underline{\theta_{i_1}\theta_{i_2}...\theta_{i_N} = \epsilon^{i_1 i_2 ... i_N}\theta_1\theta_2...\theta_N}$$

と表現することができる。例えば、

$$\theta_2\theta_1 = \epsilon^{21}\theta_1\theta_2$$

ここで $\epsilon^{21} = -\epsilon^{12} = -1$ であるから、$\theta_2\theta_1 = -\theta_1\theta_2$ となり確かに正しい。
2 つのグラスマン数の積 $\theta_1\theta_2$ について考えてみよう。この積を仮に λ と置いておこう。これはグラスマン数 χ と、

$$\lambda\chi = \theta_1\theta_2\chi = \theta_1(-\chi\theta_2) = \chi\theta_1\theta_2 = \chi\lambda$$

と可換となる。ではこの λ は複素数、すなわち c 数であるかと聞かれるとそうではない。実際

$$\lambda\lambda = \theta_1\theta_2\theta_1\theta_2 = -\theta_1\theta_1\theta_2\theta_2 = 0$$

となる。これにより λ を複素数ととらえるならそれは 0 以外ない。0 になってしまっては、数学的な価値が減ってしまうので λ は、一般的には c 数ではないととらえた方が数学的にも有意義であろう（ただし 0 は例外である）。
この一般化で容易にわかるように次の定理が成立する。

定理

- グラスマン数の偶数積は、グラスマン数、c 数と可換である。
- グラスマン数の奇数積はグラスマン数である。

次にグラスマン数はベキ零性を持つ。ベキ零とは、平たく言えば要素 x について

$$\exists n \in \mathbb{Z}_{>1} \quad x^n = 0$$

が真のときである。すなわち、$x^n = 0$ となる正の整数 n が存在すれば x はベキ零であるということになる。グラスマン数は

$$\theta^2 = \frac{1}{2}\{\theta, \theta\} = 0$$

であるからベキ零であり、グラスマン数を変数に持つ一般の関数 $f(\theta)$ を θ でべき展開すると、

$$f(\theta) = a + b\theta \qquad a, b \in \text{c number}$$

という形に展開することができる（θ の 2 乗項以上はベキ零のため消える）。
c 数 x とグラスマン数 θ を変数として持つ関数 $f(x, \theta)$ は一般に、

$$f(x, \theta) = f_1(x) + f_2(x) \cdot \theta$$

と展開でき、このような関数を**グラスマン関数**と呼ぶ。特にグラスマン数を 2 個持つグラスマン関数は、

$$f(x, \theta_1, \theta_2) = f_1(x) + f_2(x)\theta_1 + f_3(x)\theta_2 + f_4(x)\theta_1\theta_2$$

という形になる。この類推で N 個のグラスマン数を持つグラスマン関数も容易に想像ができるであろう。そしてグラスマン数を N 個持つグラスマン関数は 2^N 個の項を持つ。証明は簡単である、グラスマン関数の n 次のグラスマン数の項（$\theta_{i_1}\theta_{i_2}...\theta_{i_n}$）は何項あるかというと、$\{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_N\}$ の中から n 個を選ぶ組み合わせであるので、

$${}_N C_n = \frac{{}_N P_n}{n!} = \frac{N!}{(N-n)!n!}$$

個となる。グラスマン数が 0 次の項から N 次の項まで足し上げたものが、項の総数であるので

$$\sum_{n=0}^{N} {}_N C_n = \sum_{n=0}^{N} {}_N C_n \cdot 1^n \cdot 1^{N-n} = (1+1)^N = 2^N$$

ここで 2 項定理を持ちいた。このようにして

定理

- グラスマン数はベキ零である。
- N 個のグラスマン数からなるグラスマン関数 $f(x, \theta_1, \cdots, \theta_N)$ を多項式に展開したとき、2^N 個の項を持つ。

が成立する。

次に**実グラスマン数**や**複素グラスマン数**の性質について考察してみよう。実グラスマン数とは、

$$\theta^* = \theta$$

が成立するグラスマン数のことである。そして複素グラスマン数とはこの実グラスマン数 θ, χ を用いて

$$\zeta \stackrel{\mathrm{d}}{\equiv} \theta + i\chi, \quad \zeta^* = \theta - i\chi$$

と定義される。この二つの積は

$$\zeta^*\zeta = (\theta - i\chi)(\theta + i\chi) = i\theta\chi - i\chi\theta = 2i\theta\chi$$

である。これを用いると

$$(\theta\chi)^* = \left(\frac{1}{2i}\zeta^*\zeta\right)^* = -\frac{1}{2i}(\zeta^*\zeta)^*$$

通常の複素数と同様に $\zeta^*\zeta$ を実であると仮定すると

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2i}(\zeta^*\zeta) = -\theta\chi \\ &\rightarrow \quad \underline{(\theta\chi)^* = \chi\theta} \end{aligned}$$

このように実グラスマン数の積から $*$ を外すと順序が入れ替わる。複素グラスマン数 ζ も、

$$\begin{aligned} (\zeta_1\zeta_2)^* &= \left\{(\theta_1 + i\chi_1)(\theta_2 + i\chi_2)\right\}^* = (\theta_1\theta_2 + i\theta_1\chi_2 + i\chi_1\theta_2 - \chi_1\chi_2)^* = \theta_2\theta_1 - i\chi_2\theta_1 - i\theta_2\chi_1 - \chi_2\chi_1 \\ &= (\theta_2 - i\chi_2)\theta_1 - i(\theta_2 - i\chi_2)\chi_1 = (\theta_2 - i\chi_2)(\theta_1 - i\chi_1) \\ &= \zeta_2^*\zeta_1^* \end{aligned}$$

となる。これにより、n 個の複素グラスマン数の積の複素共役を

$$(\zeta_1\zeta_2 ... \zeta_n)^* = \zeta_n^*\zeta_{n-1}^* ... \zeta_1^*$$

と定義する。容易にわかるように

$$(\zeta^*)^* = (\theta_1 - i\theta_2)^* = \theta_1 + i\theta_2 = \zeta$$

が成立する。

次にグラスマン数 θ の微分を次のように定義する。

$$\frac{\partial\theta_b}{\partial\theta_a} = \delta_{ab}$$

そしてグラスマン数の積の微分に対しては、隣接させてから微分を行うものとする。例えば、

$$\frac{\partial}{\partial\theta_a}(\theta_b\theta_c) = \underbrace{\partial_a(\theta_b}\theta_c) + \underbrace{\partial_b(\theta_b\theta_c})= \underbrace{\partial_a\theta_b}\cdot\theta_c - \underbrace{\partial_b\theta_c}\cdot\theta_b = \delta_{ab}\theta_c - \delta_{ac}\theta_b$$

また微分はグラスマン数ではない。なぜならば、$f(\theta) = a + b\theta$ に対し、

$$\begin{aligned} \left\{\frac{d}{d\theta}, \theta\right\} f(\theta) &= \frac{d}{d\theta}\left\{\theta(a + b\theta)\right\} + \theta\frac{d}{d\theta}(a + b\theta) = a + \theta b = f(\theta) \\ &\neq 0 \cdot f(\theta) \end{aligned} \tag{0.0.4}$$

となり、グラスマン数の定義 (0.0.1) 式に反するため $d/d\theta$ はグラスマン数ではない。

微分を定義したので次に積分を定義しよう。積分を定義するにあたり大きな問題が一つある。グラスマン数による積分を通常の積分、例えばリーマン積分のようにリーマン和の極限として定義することはできないのである。なぜならグラスマン数には大小関係という概念が存在せず、そのため積分域としてグラスマン数を採用することができないからである。このことをもう少し詳しく見てみよう。

例えば、ここに二つのグラスマン数 θ_1, θ_2 が存在し、$\theta_1 > \theta_2$ という不等式が成立していたとしよう。両辺に左側から $\theta_1 > 0$ を作用させた場合、

$$\theta_1\theta_1 > \theta_1\theta_2, \quad \rightarrow \quad 0 > \theta_1\theta_2$$

しかしながら右側から $\theta_1 > 0$ を作用させた場合は結果がことなり、

$$\theta_1\theta_1 > \theta_2\theta_1, \quad \rightarrow \quad 0 > \theta_2\theta_1 \quad \rightarrow \quad 0 < \theta_1\theta_2$$

となる。これは矛盾であるため、前提条件が間違っていたことになる。この場合の前提条件は $\theta_1 > \theta_2$ と $\theta_1 > 0$ というものである。そこで今度は $\theta_1 > \theta_2$ と $\theta_1 < 0$ を仮定して同様に考察すると、

$$\theta_1\theta_1 < \theta_1\theta_2, \quad \rightarrow \quad 0 < \theta_1\theta_2$$

反対側から作用させると

$$\theta_1\theta_1 < \theta_2\theta_1, \quad \to \quad 0 > \theta_1\theta_2$$

となり、矛盾が生じる。したがって根本的に間違っている仮定は、$\theta_1 > \theta_2$ というグラスマン数に大小関係（不等式）を導入したことそのものである。一見すると、θ_1, θ_2 ではなく $a\theta, b\theta$ であれば大小関係が定義できそうな気もするが、結局は同様の議論を繰り返すことで $0 > 0$ が導かれてしまい、破綻するのである。このようにグラスマン数に大小関係という概念はないと考えるのが妥当である[*3]。例えばベクトルのように $l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2}$ で大きさを定義しようとしても、容易にわかるようにベキ零性から $= 0$ となる。

定理

- グラスマン数に大小関係（不等式）は存在しない。

グラスマン数に大小関係が存在しない為、$\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta$ といった、$\theta_1 < \theta < \theta_2$ の範囲で積分を行うといった考え方が成立しない。不等式という概念が存在しないため積分変数 θ が θ_1, θ_2 の間にあるのか無いのかの判別すらつかないのである。そこでグラスマン数の積分を定義するにあたり、通常の積分のいくつかの性質を満たすように定義するものとする。

通常の関数であれば、

$$\frac{d}{dx}\int_a^b dx\, f(x) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}$$

が成立し[*4]、さらに時として境界条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{d}{dx} f(x) = 0$$

を採用する。また通常の積分は線形性

$$\int dx\, \big(f(x) + g(x)\big) = \int dx\, f(x) + \int dx\, g(x)$$

ならびに、積分変数に独立な c 数は積分演算子と可換

$$\int dx\, af(x) = a\int dx\, f(x), \quad \Big(a \in \mathbb{C}\Big)$$

という性質を持つ。これら 4 つを満たすようにグラスマン数の積分を定義すると仮定すると

$$\frac{d}{d\theta}\int d\theta\, f(\theta) = 0, \qquad \int d\theta \frac{d}{d\theta} f(\theta) = 0, \qquad \int d\theta \big(af(\theta) + bg(\theta)\big) = a\int d\theta\, f(\theta) + b\int d\theta\, g(\theta) \tag{0.0.5}$$

特にこの第二式は、$f(\theta) = a + b\theta,\ (a,\, b \in \mathbb{C})$ より

$$0 = \int d\theta \frac{d}{d\theta} f(\theta) = \int d\theta \frac{d}{d\theta}(a + b\theta) = b\int d\theta$$

より、

$$\int d\theta = 0 \tag{0.0.6}$$

が導かれる。同様に第一式により、

$$0 = \frac{d}{d\theta}\int d\theta\, f(\theta) = \frac{d}{d\theta}\int d\theta\, (a + b\theta) = b\frac{d}{d\theta}\left(\int d\theta\, \theta\right)$$

右辺が 0 となるためには、括弧 $\Big(\quad\Big)$ の中は c 数でなければならない。そこで便利上

$$\int d\theta\, \theta = 1$$

と規格化し定義する[*5]。このようなグラスマン数の積分の定義を、**ベレジン積分**と称す。まとめると、

定義

- グラスマン数の積分は通常、ベレジン積分で定義され、その定義は次のとおりである。

$$\int d\theta = 0, \qquad \int d\theta\, \theta = 1, \qquad \int d\theta \big(af(\theta) + bg(\theta)\big) = a\int d\theta\, f(\theta) + b\int d\theta\, g(\theta)$$

実のところ、グラスマン数の一般の演算子 O はグラスマン数 θ とその微分 $d/d\theta$ だけで表現することが可能である。具体的には、

$$O = A_1\theta + A_2\frac{d}{d\theta} + A_3\theta\frac{d}{d\theta}, \qquad A_1,\, A_2,\, A_3 \in \mathbb{C}$$

[*3] 虚数 i にも同様の考察で不等式の概念が存在しない。

[*4] 一応説明しておくと $f(x) = dF(x)/dx$ として、$(d/dx)\int_a^b dx\, f(x) = (d/dx)\int_a^b dx \cdot dF(x)/dx = (d/dx)[F(x)]_a^b = (d/dx)(F(b) - F(a)) = 0$

[*5] この規格化は文献により異なる。$\int d\theta\theta = i$ などとする場合もある。

と展開することができる。グラスマン数の一般の演算子には当然積分 $\int d\theta$ も含まれる。すなわち

$$\int d\theta = A_1\theta + A_2\frac{d}{d\theta} + A_3\theta\frac{d}{d\theta}$$

ベレジン積分の定義により、

$$0 = \int d\theta 1 = A_1\theta + A_2\frac{d}{d\theta}1 + A_3\theta\frac{d}{d\theta}1 = A_1\theta, \quad \to \quad A_1 = 0$$

$$1 = \int d\theta\,\theta = \left(A_2\frac{d}{d\theta} + A_3\theta\frac{d}{d\theta}\right)\theta = A_2 + A_3\theta, \quad \to \quad A_2 = 1, \quad A_3 = 0$$

したがって実のところ

$$\int d\theta = \frac{d}{d\theta}$$

が成立する。$d/d\theta$ がグラスマン数ではないように、$\int d\theta$ もまたグラスマン数ではないが、$d\theta$ をグラスマン数と定義することは可能であり通常はそのように定義する。すなわち、

$$\int d\theta\,\theta = -\int \theta d\theta$$

などが成立する。

次にグラスマン数のデルタ関数であるが、グラスマン数のデルタ関数は

$$\int d\theta\,\delta(\theta-\theta')f(\theta) = f(\theta')$$

で定義される。このような順序で定義したときに限り、デルタ関数は

$$\delta(\theta-\theta') = \theta-\theta'$$

と単純な形になる。実際

$$\int d\theta\,\delta(\theta-\theta')f(\theta) = \int d\theta\,(\theta-\theta')(a+b\theta) = \int d\theta\,(a\theta - a\theta' + b\theta\theta') = a + b\theta' = f(\theta')$$

となり確かに正しい。ここで注意点がある。見てわかるようにこのデルタ関数はグラスマン数である。したがって順序が問題となってくる。ゆえに基準となる定義はあくまで

$$\int d\theta\,\delta(\theta-\theta')f(\theta) = f(\theta')$$

であって、

$$\int d\theta\,f(\theta)\delta(\theta-\theta') = f(\theta')$$

などではない。後者の場合は $\delta(\theta-\theta') = \theta-\theta'$ とはならないことだろう。

ここまではグラスマン数という数学の話であったが、ここからは物理学と絡めて話を進めていこう。

上で示したようにグラスマン数の微分 $d/d\theta$ はグラスマン数ではなかった。グラスマン数 θ とその反交換関係は (0.0.4) 式により

$$\left\{\theta, \frac{d}{d\theta}\right\} = 1$$

が成立する。また

$$\frac{d^2}{d\theta^2}f(\theta) = \frac{d^2}{d\theta^2}(a+b\theta) = 0$$

であるから、

$$\left(\frac{d}{d\theta}\right)^2 = 0, \qquad \theta^2 = 0$$

である。そこでこれらの代数を満たす演算子 $\hat{\psi}, \hat{\chi}$ を導入しよう。すなわち、

$$\{\hat{\psi}, \hat{\chi}\} = 1, \qquad \hat{\psi}^2 = \hat{\chi}^2 = 0$$

ここで $\hat{\psi}$ が作用すると消える状態 $|\downarrow\rangle$ を用意する。

$$\hat{\psi}\,|\downarrow\rangle = 0$$

これに $\hat{\chi}$ が作用した状態を、$|\uparrow\rangle$ と表現しよう。

$$|\uparrow\rangle \overset{\mathrm{d}}{\equiv} \hat{\chi}\,|\downarrow\rangle$$

そうすると、次の性質を導くことができる。

$$\hat{\chi}\,|\uparrow\rangle = \hat{\chi}\hat{\chi}\,|\downarrow\rangle = 0$$

$$\hat{\psi}\,|\uparrow\rangle = \hat{\psi}\hat{\chi}\,|\downarrow\rangle = (-\hat{\chi}\hat{\psi}+1)\,|\downarrow\rangle = |\downarrow\rangle$$

以上をまとめると、

$$\begin{aligned} \{\hat{\psi},\hat{\chi}\} = 1, \quad \hat{\psi}^2 = \hat{\chi}^2 = 0, \quad &(\text{定義}) \\ \hat{\psi}\,|\downarrow\rangle = 0, \quad \hat{\chi}\,|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle \quad &(\text{定義}) \\ \hat{\psi}\,|\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle, \quad \hat{\chi}\,|\uparrow\rangle = 0 \quad &(\text{定理}) \end{aligned}$$

したがって $\hat{\psi}$ を**下降演算子**、$\hat{\chi}$ を**上昇演算子**とよび、両方まとめて**昇降演算子**と呼ぶ。ここで下降演算子 $\hat{\psi}$ の固有状態 $|\,\psi\rangle$ は、

$$\hat{\psi}\,|\,\psi\rangle = |\,\psi\rangle\psi$$

で定義される。$|\,\psi\rangle$ を上の二つの状態 $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ で展開して

$$|\,\psi\rangle = |\downarrow\rangle f(\psi) + |\uparrow\rangle g(\psi)$$

となると仮定する。これを定義式に代入すると、

$$\begin{aligned} \hat{\psi}\,|\,\psi\rangle &= |\,\psi\rangle\psi \\ \hat{\psi}\{\,|\downarrow\rangle f(\psi) + |\uparrow\rangle g(\psi)\} &= \{\,|\downarrow\rangle f(\psi) + |\uparrow\rangle g(\psi)\}\psi \\ |\downarrow\rangle g(\psi) &= |\downarrow\rangle f(\psi)\psi + |\uparrow\rangle g(\psi)\psi \end{aligned}$$

両辺を見比べて

$$g(\psi) = f(\psi)\psi, \qquad 0 = g(\psi)\psi$$

第二式より、

$$0 = g(\psi)\psi \quad \to \quad g(\psi) = a\psi, \qquad a \in \mathbb{C}$$

第一式より、

$$g(\psi) = f(\psi)\psi, \quad \to \quad a\psi = f(\psi)\psi, \quad \to \quad f(\psi) = a + b\psi, \qquad b \in \mathbb{C}$$

したがって一般には

$$|\,\psi\rangle = |\downarrow\rangle(a+b\psi) + a\,|\uparrow\rangle\psi$$

ここで a, b は任意の c 数である。しかしながら $a=0, b=1$ と置くのはナンセンスである。なぜならば、

$$\hat{\psi}\,|\,\psi\rangle = |\,\psi\rangle\psi = \big(\,|\downarrow\rangle\psi\big)\psi = 0 = |\,\psi\rangle 0$$

となり $|\,\psi\rangle = |\,0\rangle$ を意味してしまうからである（0 はグラスマン数でもあるため矛盾はしない）[*6]。そこで代わりに $a=1, b=0$ と置く。この場合は今のようなことは起こらない。したがって改めて

$$|\,\psi\rangle \overset{\mathrm{d}}{\equiv} |\downarrow\rangle + |\uparrow\rangle\psi$$

と定義する。「関数とブラケット記法」（量子力学-ブラケット記法）で見たように連続変数 ν の場合、

$$\langle\nu\,|\,\nu'\rangle = \delta(\nu-\nu')$$

と規格化する。グラスマン数の場合デルタ関数は、$\delta(\theta-\theta') = \theta-\theta'$ となるため

$$\langle\psi\,|\,\psi'\rangle = \psi - \psi'$$

である。$\langle\psi\,|$ はまだ定義をしていなかったため、この式を $\langle\psi\,|$ の定義として採用する。これにより

$$\begin{aligned} &\langle\psi\,|\,\hat{\psi}\,|\,\psi'\rangle = \langle\psi\,|\,\psi'\rangle\psi = (\psi-\psi')\psi = \psi\psi' = -\psi(\psi-\psi') \\ &\langle\psi\,|\overleftarrow{\hat{\psi}^\dagger}|\,\psi'\rangle = -\psi\langle\psi\,|\,\psi'\rangle \end{aligned}$$

より

$$\underline{\langle\psi\,|\overleftarrow{\hat{\psi}^\dagger} = -\psi\langle\psi\,|}\,/\!\!/$$

が成立する。また

[*6] むしろこの b は ψ のゲージ変換である。

$$\begin{aligned}\langle \psi' \mid \psi'' \rangle &= \psi' - \psi'' = \int d\psi\, \psi\psi' - \int d\psi\, \psi\psi'' = -\int d\psi\, \psi'\psi - \int d\psi\, \psi\psi'' = -\int d\psi\, \{(\psi'-\psi)(\psi-\psi'') + \psi'\psi'' + \psi^2\} \\ &= -\int d\psi (\psi'-\psi)(\psi-\psi'') = \int (\psi'-\psi) d\psi\, (\psi-\psi'') \\ &= \int \langle \psi' \mid \psi \rangle d\psi \langle \psi \mid \psi'' \rangle \end{aligned} \tag{0.0.7}$$

これにより、

$$\underline{1 = \int \mid \psi \rangle d\psi \langle \psi \mid} /\!/$$

が成立する。さてデルタ関数の積分表示は

$$\delta(q-q') = \frac{1}{2\pi}\int dp\, \exp\{ip(q-q')\}$$

であった。ここで q は座標で、p は運動量である。演算子としては（プランク単位系で）

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i$$

という交換関係が成立する。$\hat{\chi}, \hat{\psi}$ では $\{\hat{\psi}, \hat{\chi}\} = 1$ が成立した。これを変形すると

$$\{\hat{\psi}, i\chi\} = i$$

この反交換関係は、上の位置と運動量の交換関係に対応するものである。したがって、$\hat{\psi} \cong \hat{q}$ 、$i\hat{\chi} \cong \hat{p}$ という対応関係が考えられる。この類推によりグラスマン数のデルタ関数は

$$\delta(\psi-\psi') \overset{?}{=} \frac{i}{2\pi}\int d\chi \exp\{i(i\chi)(\psi-\psi')\} = \frac{i}{2\pi}\int d\chi \exp\{-\chi(\psi-\psi')\}$$

となると推察される（あくまで推察である）。規格化 $(i/2\pi)$ はともかく、このように被積分関数は $\exp(-\chi(\psi-\psi'))$ という形をとるのが自然であると思われる。そこで、被積分関数がこのような形になるように注意しながら、グラスマン数のデルタ関数の式変形を行うと、

$$\begin{aligned}\delta(\psi-\psi') &= \psi - \psi' = \int d\chi\, \chi(\psi-\psi') = -\int d\chi \left\{1 - \chi(\psi-\psi') + \frac{1}{2}\big(-\chi(\psi-\psi')\big)^2 + \cdots\right\} \\ &= -\int d\chi \exp\big(-\chi(\psi-\psi')\big)\end{aligned}$$

となる。すなわち、

$$\underline{\langle \psi \mid \psi' \rangle = -\int d\chi \exp\big(-\chi(\psi-\psi')\big)} /\!/$$

　また、

$$\begin{aligned}\psi - \psi' &= \langle \psi \mid \psi' \rangle = \langle \psi \mid \Big(|\downarrow\rangle + |\uparrow\rangle \psi' \Big) \\ &= \langle \psi |\downarrow\rangle + \langle \psi |\uparrow\rangle \psi'\end{aligned}$$

より、

$$\langle \psi |\downarrow\rangle = \psi, \quad \langle \psi |\uparrow\rangle = -1 \tag{0.0.8}$$

となる。これにより

$$\begin{aligned}\langle \psi \mid \hat{\chi} \mid \psi' \rangle &= \langle \psi \mid \hat{\chi}\Big(|\downarrow\rangle + |\uparrow\rangle \psi' \Big) = \langle \psi |\uparrow\rangle = -1 = -\int d\chi\, \chi \left\{1 - \chi(\psi-\psi') + \cdots\right\} \\ &= -\int d\chi\, \chi \exp\Big\{-\chi(\psi-\psi')\Big\}\end{aligned}$$

と表現することができる。$\hat{\psi}$ に対しても

$$\begin{aligned}\langle \psi \mid \hat{\psi} \mid \psi' \rangle &= \langle \psi \mid \psi' \rangle \psi' = -\int d\chi \exp\Big\{-\chi(\psi-\psi')\Big\}\psi' = -\int d\chi\, \{1 - \chi(\psi-\psi')\}\psi' = -\int d\chi\, \psi'\{1-\chi(\psi-\psi')\} \\ &= -\int d\chi\, \psi' \exp\Big\{-\chi(\psi-\psi')\Big\}\end{aligned}$$

このようにしてより一般には、

$$\underline{\langle \psi \mid f(\hat{\chi}, \hat{\psi}) \mid \psi' \rangle = -\int d\chi\, f(\chi, \psi') \exp\Big\{-\chi(\psi-\psi')\Big\}} /\!/ \tag{0.0.9}$$

が成立する。$f(\hat{\chi},\,\hat{\psi})$ は一般の関数であるが、この関数に現れる積 $\hat{\chi}$ と $\hat{\psi}$ に関しては常に下降演算子 $\hat{\psi}$ が右側に来るように定義しているものとする。もう少しだけ詳しく説明すると、

$$f(\chi,\,\psi) \overset{\mathrm{d}}{\equiv} 1 + \psi\chi$$

という関数があったとしよう。しかし、これは

$$f(\chi,\,\psi) = 1 - \chi\psi$$

と表現することも可能であるが、これを演算子にするとそれぞれ

$$f(\hat{\chi},\,\hat{\psi}) = 1 + \hat{\psi}\hat{\chi}, \qquad f(\hat{\chi},\,\hat{\psi}) = 1 - \hat{\chi}\hat{\psi}$$

となる。しかしながらこの二つは $\hat{\chi}\hat{\psi} = -\hat{\psi}\hat{\chi} + 1$ という関係により、同一のものではない。そこで我々は $\hat{\chi}$ と $\hat{\psi}$ の積が現れた場合、下降演算子 $\hat{\psi}$ が右側に来るものを採用する。この場合であれば、後者の

$$f(\hat{\chi},\,\hat{\psi}) = 1 - \hat{\chi}\hat{\psi}$$

が採用されることになる。

次にグラスマン数の経路積分を考察してみよう。上で見たように $\hat{q}$ は $\hat{\psi}$ が、$\hat{p}$ には $i\hat{\chi}$ が対応した。そこで、ハイゼンベルグ描像での $|\,q,\,t\rangle_H$ には、$|\,\psi,\,t\rangle_H$ が対応すると考えられる。ひいては

$$|\,\psi,\,t\rangle_H = e^{i\hat{H}(\hat{\chi},\,\hat{\psi})t}\,|\,\psi\rangle$$

ただ面倒であるので $\rangle_H$ についているHはこれ以降省略する。そして

$$\langle\psi\,|\,\psi'\rangle = \langle\psi\,|\,e^{-i\hat{H}t}e^{i\hat{H}t}\,|\,\psi'\rangle = \Big(\langle\psi\,|\,e^{i\overleftarrow{\hat{H}}^{\dagger}t}\Big)\Big(e^{i\hat{H}t}\,|\,\psi'\rangle\Big) = \Big(\langle\psi\,|\,e^{i\overleftarrow{\hat{H}}t}\Big)\Big(e^{i\hat{H}t}\,|\,\psi'\rangle\Big) = \langle\psi,\,t\,|\,\psi',\,t\rangle$$

が成立することに気を付けると (0.0.6) 式より

$$\langle\psi'\,|\,\psi''\rangle = \int \langle\psi'\,|\,\psi\rangle d\psi\langle\psi\,|\,\psi''\rangle$$
$$\langle\psi',\,t\,|\,\psi'',\,t\rangle = \int \langle\psi',\,t\,|\,\psi,\,t\rangle d\psi\langle\psi,\,t\,|\,\psi'',\,t\rangle$$

両辺を見比べて

$$1 = \int |\,\psi,\,t\rangle d\psi\langle\psi,\,t\,|$$

を得る。次に時刻 T を n 等分して

$$\epsilon \overset{\mathrm{d}}{\equiv} \frac{T}{n}, \qquad t_m \overset{\mathrm{d}}{\equiv} \epsilon m, \qquad \psi_m \overset{\mathrm{d}}{\equiv} \psi(t_m)$$

としておこう。すなわち $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T$ が成立する。これらにより、

$$\begin{aligned}
\langle\psi_f,\,T\,|\,\psi_i,\,0\rangle &= \langle\psi_f,\,T\,|\left(\int |\,\psi_{n-1},\,t_{n-1}\rangle d\psi_{n-1}\langle\psi_{n-1},\,t_{n-1}\,|\right)\left(\int |\,\psi_{n-2},\,t_{n-2}\rangle d\psi_{n-2}\langle\psi_{n-2},\,t_{n-2}\,|\right) \\
&\qquad \times \ldots \times \left(\int |\,\psi_1,\,t_1\rangle d\psi_1\langle\psi_1,\,t_1\,|\right)|\,\psi_i,\,0\rangle \\
&= \int \Big(\langle\psi_f,\,T\,|\,\psi_{n-1},\,t_{n-1}\rangle\Big)d\psi_{n-1}\Big(\langle\psi_{n-1},\,t_{n-1}\,|\,\psi_{n-2},\,t_{n-2}\rangle\Big)d\psi_{n-2}\ldots \\
&\qquad \times \ldots \times \Big(\langle\psi_2,\,t_2\,|\,\psi_1,\,t_1\rangle\Big)d\psi_1\Big(\langle\psi_1,\,t_1\,|\,\psi_i,\,0\rangle\Big) \\
&= \int \Big(\langle\psi_f\,|\,e^{-i\hat{H}(T-t_{n-1})}\,|\,\psi_{n-1}\rangle\Big)d\psi_{n-1}\Big(\langle\psi_{n-1}\,|\,e^{-i\hat{H}(t_{n-1}-t_{n-2})}\,|\,\psi_{n-2}\rangle\Big)d\psi_{n-2}\ldots \\
&\qquad \times \ldots \times \Big(\langle\psi_2\,|\,e^{-i\hat{H}(t_2-t_1)}\,|\,\psi_1\rangle\Big)d\psi_1\Big(\langle\psi_1\,|\,e^{-i\hat{H}t_1}\,|\,\psi_i\rangle\Big)
\end{aligned}$$

ここで (0.0.9) 式と $\epsilon = t_i - t_{i-1}$ を用いて

$$\begin{aligned}
&= \int \left(-\int d\chi_{n-1}\,e^{-iH(\chi_{n-1},\,\psi_{n-1})\epsilon}e^{-\chi_{n-1}(\psi_n-\psi_{n-1})}\right)d\psi_{n-1}\left(-\int d\chi_{n-2}e^{-i\hat{H}(\chi_{n-2},\,\hat{\psi}_{n-2})\epsilon}e^{-\chi_{n-2}(\psi_{n-1}-\psi_{n-2})}\right)d\psi_{n-2}\cdots \\
&\qquad \times \ldots \times \left(-\int d\chi_1 e^{-iH(\chi_1,\,\psi_1)\epsilon}e^{-\chi_1(\psi_2-\psi_1)}\right)d\psi_1\left(-\int d\chi_0\,e^{-iH(\chi_0,\,\psi_0)\epsilon}e^{-\chi_1(\psi_1-\psi_0)}\right) \\
&= -\int d\chi_{n-1}\,d\psi_{n-1}d\chi_{n-2}d\psi_{n-2}\ldots d\psi_1 d\chi_0 \exp\left\{\sum_{m=0}^{n-1}\Big(-iH(\chi_m,\,\psi_m)\epsilon - \chi_m(\psi_{m+1}-\psi_m)\Big)\right\}
\end{aligned}$$

ここで

$$\dot{\psi}(t_m) \overset{\mathrm{d}}{\equiv} \frac{d\psi(t)}{dt}\Big|_{t=t_m} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\psi(t_{m+1})-\psi(t_m)}{\Delta t} = \frac{\psi_{m+1}-\psi_m}{\epsilon}, \qquad \underbrace{\int dx\, f(x) \overset{\mathrm{d}}{\equiv} \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{m=0}^{n-1} f(x_m)\Delta x}_{\text{リーマン積分}}$$

より

$$\to \int [d\chi d\psi] \exp\left\{\int_0^T dt\Big(-\chi\dot{\psi} - iH(\chi,\,\psi)\Big)\right\}$$

となる。最後で

$$\int [d\chi d\psi] \overset{\mathrm{d}}{\equiv} \int d\chi_0 d\psi_1 ... \int d\psi_{n-1} d\chi_{n-1}$$

とした。ただし係数に符号がつかないように順序を変えているものとする。例えば、

$$-\int d\chi_0 d\psi_1 d\chi_1$$

なら

$$\int [d\chi d\psi] \overset{\mathrm{d}}{\equiv} \int d\chi_0 d\chi_1 d\psi_1 = -\int d\chi_0 d\psi_1 d\chi_1$$

として負の符号が係数につかないように $d\chi d\psi = -d\psi d\chi$ の反対称性を用いて相殺しているものとする。また、$i\chi \cong p,\, \psi \cong q$ という大雑把な対応関係により、

$$-\chi\dot{\psi} - iH = i\big(i\chi\dot{\psi} - H(\chi,\,\psi)\big) \cong i\big(p\dot{q} - H(p,\,q)\big)$$

と推察することができる。このようにしてグラスマン数の経路積分は

$$\underline{\big\langle \psi_f,\, T \mid \psi_i,\, 0\big\rangle = \int [d\chi d\psi] \exp(iS)} /\!/$$

となる。

さて次に内積を定義しよう。内積には二つの有用な定義が存在する。

$$\langle\, \uparrow\mid\uparrow\,\rangle = \langle\, \downarrow\mid\downarrow\,\rangle = 1, \qquad \langle\, \uparrow\mid\downarrow\,\rangle = \langle\, \downarrow\mid\uparrow\,\rangle = 0 \tag{0.0.10}$$

$$\langle\, \uparrow\mid\downarrow\,\rangle = \langle\, \downarrow\mid\uparrow\,\rangle = 1, \qquad \langle\, \uparrow\mid\uparrow\,\rangle = \langle\, \downarrow\mid\downarrow\,\rangle = 0 \tag{0.0.11}$$

(0.0.10) 式は通常の物理的な振動子の定義である。この場合

$$\langle\, \uparrow\mid \hat{\chi} \mid\downarrow\,\rangle = \langle\, \uparrow\mid\uparrow\,\rangle = 1 = \langle\, \downarrow\mid\downarrow\,\rangle = \Big(\langle\, \uparrow\mid\overset{\leftarrow}{\hat{\psi}}\,\Big)\mid\downarrow\,\rangle = \langle\, \uparrow\mid \hat{\psi}^\dagger \mid\downarrow\,\rangle$$

これにより

$$\hat{\psi}^\dagger = \chi$$

が成立する。(0.0.11) 式はファデエフ=ポポフゴーストに使われる定義で、

$$\langle\, \uparrow\mid \hat{\psi} \mid\uparrow\,\rangle = \langle\, \uparrow\mid\downarrow\,\rangle = 1 = \langle\, \downarrow\mid\uparrow\,\rangle = \langle\, \uparrow\mid\overset{\leftarrow}{\hat{\psi}}\mid\uparrow\,\rangle = \langle\, \uparrow\mid \hat{\psi}^\dagger \mid\uparrow\,\rangle$$

より、$\hat{\psi} = \hat{\psi}^\dagger$

$$\langle\, \downarrow\mid \hat{\chi} \mid\downarrow\,\rangle = \langle\, \downarrow\mid\uparrow\,\rangle = 1 = \langle\, \uparrow\mid\downarrow\,\rangle = \langle\, \downarrow\mid\overset{\leftarrow}{\hat{\chi}}\mid\downarrow\,\rangle = \langle\, \downarrow\mid \hat{\chi}^\dagger \mid\downarrow\,\rangle$$

より $\hat{\chi} = \hat{\chi}^\dagger$ を得る。これらより $\hat{\chi},\, \hat{\psi}$ はともにエルミート演算子となる。

次に分配関数 Z を考えてみよう。「離散系でのボルツマンの原理」（量子力学-ボルツマンの原理）で見たように、分配関数 Z は、

$$Z \overset{\mathrm{d}}{\equiv} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta E_n), \qquad \left(\beta \overset{\mathrm{d}}{\equiv} \frac{1}{kT}\right)$$

で定義される（k はボルツマン定数で T は温度である）。式変形を行うと

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{n=0}^{\infty}\exp(-\beta E_n) = \sum_{n=0}^{\infty}\delta_{nn}\exp(-\beta E_n) = \sum_{n=0}^{\infty}\big\langle E_n \mid E_n\big\rangle \exp(-\beta E_n) = \sum_{n=0}^{\infty}\big\langle E_n \mid \exp(-\beta\hat{H}) \mid E_n\big\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\big\langle E_n \mid \exp(-\beta\hat{H}) \mid \int \mid \psi\big\rangle d\psi \big\langle \psi \mid E_n\big\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\int \big\langle E_n \mid \exp(-\beta\hat{H}) \mid \psi\big\rangle \Big(d\psi\cdot\big\langle\psi \mid E_n\big\rangle\Big) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\int \Big(d\psi\cdot\big\langle\psi \mid E_n\big\rangle\Big)\big\langle E_n \mid \exp(-\beta\hat{H}) \mid \psi\big\rangle = \int d\psi \big\langle \psi \mid \sum_{n=0}^{\infty} \mid E_n\big\rangle\big\langle E_n \mid \exp(-\beta\hat{H}) \mid \psi\big\rangle \\ &= \int d\psi\, \big\langle \psi \mid \exp(-\beta\hat{H}) \mid \psi\big\rangle \end{aligned} \tag{0.0.12}$$

「ユークリッド型経路積分」（経路積分）で述べたようにユークリッド型経路積分では

$$\langle q,\, u \mid_E \overset{\mathrm{d}}{\equiv} \langle q \mid_S e^{-\hat{H}u}$$

が成立する。したがって (0.0.12) 式を式変形して

$$Z = \int d\psi \langle \psi \mid \exp(-\beta \hat{H}) \mid \psi \rangle = \int d\psi \langle \psi,\, \beta \mid \psi,\, 0 \rangle_E \tag{0.0.13}$$

となる。これが分配関数 Z とユークリッド型経路積分 $\langle q_f,\, u_f \mid q_i,\, u_i \rangle$ の関係である。換言すれば、ユークリッド時間（虚数時間）$u = 0$ に状態 $\mid \psi \rangle$ であったものが、時刻 $u = \beta$ で状態 $\mid \psi \rangle$ に戻っており、これはループしていることを表している。それが統計力学での分配関数に対応するということである*7。またこのようにループしている経路積分を周期的といい、

$$\int d\psi \langle \psi,\, U \mid -\psi,\, 0 \rangle_E$$

といった経路積分を反周期的という*8

ここで右辺の経路積分を評価するために一般化して便利上

$$\int d\psi \langle \psi \mid \hat{A} \mid (-1)^p \psi \rangle$$

として考えてみよう。この $\hat{A}$ は一般の演算子である。$(-1)^p$ は、周期的な場合には $+1$ を反周期的な場合を考えるときには -1 になるものとする。$i,\, j \in \{\downarrow, \uparrow\}$ として

$$\hat{A} \mid j \rangle = \sum_j \mid j \rangle A_{ji}$$

と表現することができる。これを用いると、

$$\int d\psi \, \langle \psi \mid \hat{A} \mid (-1)^p \psi \rangle = \int d\psi \, \langle \psi \mid \hat{A}\Big(\lvert \downarrow \rangle + \lvert \uparrow \rangle \Big((-1)^p \psi\Big)\Big) = \int d\psi \left\{ \Big(\langle \psi \lvert \downarrow \rangle A_{\downarrow\downarrow} + \langle \psi \lvert \uparrow \rangle A_{\uparrow\downarrow} \Big) + (-1)^p \Big(\langle \psi \lvert \downarrow \rangle A_{\downarrow\uparrow} + \langle \psi \lvert \uparrow \rangle A_{\uparrow\uparrow} \Big) \psi \right\}$$

(0.0.8) 式を用いて

$$\begin{aligned}
&= \int d\psi \left\{ \psi A_{\downarrow\downarrow} - A_{\uparrow\downarrow} + (-1)^p \psi A_{\downarrow\uparrow} \psi - (-1)^p A_{\uparrow\uparrow} \psi \right\} \\
&= A_{\downarrow\downarrow} - (-1)^p A_{\uparrow\uparrow} \\
&= \begin{cases} A_{\downarrow\downarrow} - A_{\uparrow\uparrow} & (\text{周期的な場合}) \\ A_{\downarrow\downarrow} + A_{\uparrow\uparrow} & (\text{反周期的な場合}) \end{cases}
\end{aligned} \tag{0.0.14}$$

ここでここで内積の定義として (0.0.10) 式を採用すれば

$$= \begin{cases} \langle \downarrow \lvert \downarrow \rangle A_{\downarrow\downarrow} - \langle \uparrow \lvert \uparrow \rangle A_{\uparrow\uparrow} & (\text{周期的な場合}) \\ \langle \downarrow \lvert \downarrow \rangle A_{\downarrow\downarrow} + \langle \uparrow \lvert \uparrow \rangle A_{\uparrow\uparrow} & (\text{反周期的な場合}) \end{cases} \tag{0.0.15}$$

周期的な場合についている符号を消す目的で

$$\hat{F} \lvert \downarrow \rangle = 2n \lvert \downarrow \rangle, \quad \hat{F} \lvert \uparrow \rangle = (2n+1) \lvert \uparrow \rangle, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

という演算子 $\hat{F}$、すなわち $\lvert \downarrow \rangle$ に作用すると偶数、$\lvert \uparrow \rangle$ に作用すると奇数になる演算子 $\hat{F}$ を導入すると、

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} \langle \downarrow \rvert \, (-1)^{\hat{F}} \, \lvert \downarrow \rangle A_{\downarrow\downarrow} + \langle \uparrow \rvert \, (-1)^{\hat{F}} \, \lvert \uparrow \rangle A_{\uparrow\uparrow} & (\text{周期的な場合}) \\ \langle \downarrow \lvert \downarrow \rangle A_{\downarrow\downarrow} + \langle \uparrow \lvert \uparrow \rangle A_{\uparrow\uparrow} & (\text{反周期的な場合}) \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left(\langle \downarrow \rvert \, (-1)^{\hat{F}} \sum_i \mid i \rangle A_{i\downarrow} - \underbrace{\langle \downarrow \rvert \, (-1)^{\hat{F}} \, \lvert \uparrow \rangle}_{=0} A_{\uparrow\downarrow} \right) + \left(\langle \uparrow \rvert \, (-1)^{\hat{F}} \sum_i \mid i \rangle A_{i\uparrow} - \underbrace{\langle \uparrow \rvert \, (-1)^{\hat{F}} \, \lvert \downarrow \rangle}_{=0} A_{\downarrow\uparrow} \right) \\ \left(\langle \downarrow \rvert \sum_i \mid i \rangle A_{i\downarrow} - \underbrace{\langle \downarrow \lvert \uparrow \rangle}_{=0} A_{\uparrow\downarrow} \right) + \left(\langle \uparrow \rvert \sum_i \mid i \rangle A_{i\uparrow} - \underbrace{\langle \uparrow \lvert \downarrow \rangle}_{=0} A_{\downarrow\uparrow} \right) \end{cases} \\
&= \begin{cases} \langle \downarrow \rvert \, (-1)^{\hat{F}} \hat{A} \, \lvert \downarrow \rangle + \langle \uparrow \rvert \, (-1)^{\hat{F}} \hat{A} \, \lvert \uparrow \rangle \\ \langle \downarrow \rvert \, \hat{A} \, \lvert \downarrow \rangle + \langle \uparrow \rvert \, \hat{A} \, \lvert \uparrow \rangle \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mathrm{Tr}\left\{ (-1)^{\hat{F}} \hat{A} \right\} & (\text{周期的}) \\ \mathrm{Tr}\left\{ \hat{A} \right\} & (\text{反周期的}) \end{cases} \\
&\to \quad \underline{\int d\psi \langle \psi \mid \hat{A} \mid \psi \rangle = \mathrm{Tr}\left\{ (-1)^{\hat{F}} \hat{A} \right\}} /\!/, \qquad \underline{\int d\psi \langle \psi \mid \hat{A} \mid -\psi \rangle = \mathrm{Tr}\left\{ \hat{A} \right\}} /\!/ \qquad ((0.0.10)\ \text{式の内積を採用})
\end{aligned} \tag{0.0.16}$$

*7 本書では統計力学の概念はもう少し後で登場する

*8 反周期的な経路積分は例えば弦理論の世界面の構造により現れたりする。がここではその詳しい説明は省略する。

となる。(0.0.13) 式とこれを組みあわせて、

$$\underline{Z=\int d\psi\big\langle\psi,\,U\mid\psi,\,0\big\rangle_E=\mathrm{Tr}\Big\{(-1)^{\hat F}\exp\big(-\hat HU\big)\Big\}}\!/\!\!/,\quad (\text{周期的})$$

$$\underline{Z=\int d\psi\big\langle\psi,\,U\mid-\psi,\,0\big\rangle_E=\mathrm{Tr}\Big\{\exp\big(-\hat HU\big)\Big\}}\!/\!\!/,\quad (\text{反周期的}) \tag{0.0.17}$$

を得る。

最後に

$$\langle 1\rangle=\int[d\psi\,d\chi]\exp\left(\int d^dx\,\chi\Delta\psi\right)$$

を考えこれを評価してみよう。Δ の固有関数を Ψ_i とし、その固有値を λ_i、Δ^T の固有関数を Γ_i とし固有値を λ_i' とする。

$$\Delta\Psi_i=\lambda_i\Psi_i,\qquad \Delta^T\Gamma_i=\lambda_i'\Gamma_i$$

ここで Δ^T は、

$$\int d^dx\,\Delta^T\Gamma_i(x)\cdot\Psi_j(x)=\int d^dx\,\Gamma_i(x)\Delta\Psi_j(x)$$

を満たす演算子として定義される[*9]。また

$$\int d^dx\,\Gamma_i(x)\Psi_j(x)=\delta_{ij}$$

と規格化しているものとする。これにより、

$$\begin{aligned}\lambda_i&=\sum_j\delta_{ij}\lambda_j=\sum_j\int d^dx\,\Gamma_i(x)\Psi_j(x)=\sum_j\int d^dx\,\Gamma_i(x)\Delta\Psi_j(x)=\sum_j\int d^dx\,\Delta^T\Gamma_i(x)\Psi_j(x)=\sum_j\lambda_i'\int d^dx\,\Delta^T\Gamma_i(x)\Psi(x)=\sum_j\lambda_i'\delta_{ij}\\&=\lambda_i'\end{aligned}$$

となる。この Δ の固有関数 Ψ_i を用いて ψ を展開し、Γ_i を用いて χ を展開すると、

$$\psi(x)=\sum_i\psi_i\Psi_i(x),\qquad \chi(x)=\sum_i\chi_i\Gamma_i(x)$$

これらを用いると

$$\begin{aligned}\langle 1\rangle&=\int[d\psi\,d\chi]\exp\left(\int d^dx\,\chi\Delta\psi\right)=\int[d\psi\,d\chi]\exp\left(\sum_{ij}\int d^dx\,\chi_i\Gamma(x)\psi_j\lambda_j\Psi(x)\right)=\int[d\psi\,d\chi]\exp\left(\sum_{ij}\lambda_j\chi_i\psi_j\int d^dx\,\Gamma(x)\Psi(x)\right)\\&=\int[d\psi\,d\chi]\exp\left(\sum_{ij}\lambda_j\chi_i\psi_j\delta_{ij}\right)=\int[d\psi\,d\chi]\exp\left(\sum_i\lambda_i\chi_i\psi_i\right)=\prod_i\int[d\psi_i\,d\chi_i]\exp\left(\lambda_i\chi_i\psi_i\right)\\&=\prod_i\lambda_i\end{aligned}$$

ただし、Ψ_i は Δ の固有関数であるということから、行列-演算子対応[*10]により

$$\lambda_i\Psi_i(x)=(\Delta)_{ij}\Psi_j(x)\quad\rightarrow\quad\begin{pmatrix}\lambda_1\Psi_1(x)\\\lambda_2\Psi_2(x)\\\vdots\\\lambda_i\Psi_i(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\0&0&\ddots&0\\0&0&\cdots&\lambda_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi_1\\\Psi_2\\\vdots\\\Psi_i\end{pmatrix}$$

がいえ、ひいては

$$\underline{\langle 1\rangle=\int[d\psi\,d\chi]\exp\left(\int d^dx\,\chi\Delta\psi\right)=\det\Delta}\!/\!\!/$$

となる。これはボソン型の結果とは逆である。

参考文献

- 「経路積分法-量子力学から場の量子論へ-」M.S. スワンソン著
- 「STRING THEORY VOLUME I」JOSEPH POLCHINSKI 著

[*9] 具体的には「トレースレス対称微分演算子」(弦理論-弦理論で用いる数学的技法)参照

[*10] 「関数とベクトル、演算子と行列対」参照